Correction du devoir surveillé $n°7$

Problème I : somme d'une série alternée

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ et $v_n = \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$.

1. (a) $u_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = [\mathrm{Arctan}(x)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$ /1

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [0,1]$, $0 \leqslant \frac{x^{2n}}{1+x^2} \leqslant x^{2n}$. Par croissance de l'intégrale, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2n+1}$. /1

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, par linéarité de l'intégrale, on a : $u_n + u_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n}+x^{2n+2}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{2n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2n+1}$. /1

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k(u_k+u_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k - (-1)^{k+1}u_{k+1}$. /1

   Par un télescopage, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k = (-1)^0 u_0 - (-1)^{n+1}u_{n+1} = \frac{\pi}{4} + (-1)^n u_{n+1}$.

   (c) D'après la question 1)b), la suite (u_n) converge vers 0 par encadrement. Ainsi, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k = \frac{\pi}{4} + (-1)^n u_{n+1} \longrightarrow \frac{\pi}{4}$.

   Autrement dit, $\sum v_n$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \frac{\pi}{4}$. /1

   (d) On a $|v_n| = \dfrac{1}{2n+1} \sim \dfrac{1}{2n}$. Ce dernier terme est le terme d'une série divergente (proportionnel à celui de la série harmonique). D'après les CCSTP, $\sum |v_n|$ diverge i.e. $\sum v_n$ ne converge pas absolument. /1

Problème II : cas particulier d'une interpolation d'Hermite

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère l'application de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}^4$ suivante : $\varphi : P \mapsto (P(0), P'(0), P(\alpha), P'(\alpha))$.

1. Soit $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_3[X]$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $\varphi(P_1+\lambda P_2) = ((P_1+\lambda P_2)(0), (P_1+\lambda P_2)'(0), (P_1+\lambda P_2)(\alpha), (P_1+\lambda P_2)'(\alpha))$ i.e. $\varphi(P_1+\lambda P_2) = (P_1(0), P_1'(0), P_1(\alpha), P_1'(\alpha)) + \lambda\,(P_2(0), P_2'(0), P_2(\alpha), P_2'(\alpha)) = \varphi(P_1)+\lambda\varphi(P_2)$. D'où φ est une application linéaire. /1

2. On a $\varphi(1) = (1,0,1,0)$; $\varphi(X) = (0,1,\alpha,1)$; $\varphi(X^2) = (0,0,\alpha^2,2\alpha)$ et $\varphi(X^3) = (0,0,\alpha^3,3\alpha^2)$. Ainsi : /1

$$M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 \\ 0 & 1 & 2\alpha & 3\alpha^2 \end{pmatrix}$$

3. En développant par rapport à la première ligne (et ce deux fois), on obtient $\det(M) = \begin{vmatrix} \alpha^2 & \alpha^3 \\ 2\alpha & 3\alpha^2 \end{vmatrix} = \alpha^4$. /1

4. Or φ est un isomorphisme si et seulement si $\det(M) \neq 0$ si et seulement si $\alpha \neq 0$. /1

5. Notons $\mathscr{F}$ la famille de $\mathbb{R}_3[X]$ suivante : $\mathscr{F} = ((2X+\alpha)(X-\alpha)^2, \alpha X(X-\alpha)^2, (3\alpha-2X)X^2, \alpha(X-\alpha)X^2)$.

   (a) On obtient directement $P = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = \begin{pmatrix} \alpha^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^3 & 0 & 0 \\ -3\alpha & -2\alpha^2 & 3\alpha & -\alpha^2 \\ 2 & \alpha & -2 & \alpha \end{pmatrix}$. /1

   (b) En développant par rapport à la première ligne (et ce deux fois), on a $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = \alpha^6 \begin{vmatrix} 3\alpha & -\alpha^2 \\ -2 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^8$. /1

   (c) La famille $\mathscr{F}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$ si et seulement si $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) \neq 0$ si et seulement si $\alpha \neq 0$. /1

   On se place à présent dans ce cas i.e. le cas où $\alpha \neq 0$.

   (d) On a $M_{\mathscr{F}} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{F},\mathscr{C}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \alpha^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^3 \end{pmatrix} = \alpha^3 I_4$. /1

(e) Sans calculs, on a $M_{\mathscr{F}} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{F},\mathscr{C}}(\varphi) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\varphi)\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{F}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}_3[X]}) = MP$.

On vérifie aisément cette relation par le calcul. /1

(f) Comme $\alpha \neq 0$, la matrice $M_{\mathscr{F}} = \alpha^3 I_4$ est inversible. On retrouve que l'application φ est un isomorphisme. /2

De plus, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(\varphi^{-1}) = (\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\varphi))^{-1} = M^{-1} = \frac{1}{\alpha^3}P$. D'où

$$\varphi^{-1} : (a,b,c,d) \mapsto a + bX + \frac{1}{\alpha^2}(-3a - 2\alpha b + 3c - \alpha d)X^2 + \frac{1}{\alpha^3}(2a + \alpha b - 2c + \alpha d)X^3$$

(g) Application : l'unique polynôme P de $\mathbb{R}_3[X]$ vérifiant l'unique polynôme P de $\mathbb{R}_3[X]$ vérifiant $P(0) = P'(0) = 1$ et $P(1) = P'(1) = 0$ est $P = \varphi^{-1}(1,1,0,0) = 1 + X - 5X^2 + 3X^3$. /1

Problème III : séries de Bertrand

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On considère la série de Bertrand $\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$.

1. Pour $\alpha > 1$, on a $\frac{\frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}}{\frac{1}{n^{\frac{\alpha+1}{2}}}} = \frac{n^{\frac{1-\alpha}{2}}}{(\ln n)^\beta} \longrightarrow 0$ par croissance comparée car $\frac{1-\alpha}{2} < 0$. D'où $\frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta} = o\left(\frac{1}{n^{\frac{\alpha+1}{2}}}\right)$.
   Or $\sum \frac{1}{n^{\frac{\alpha+1}{2}}}$ est une série convergente d'après le théorème des séries de Riemann ($\frac{\alpha+1}{2} > 1$).
   D'après les CCSTP, $\sum \frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$ est convergente lorsque $\alpha > 1$. /1
2. Pour $\alpha < 1$, on a $\frac{\frac{1}{n^{\frac{\alpha+1}{2}}}}{\frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}} = n^{\frac{\alpha-1}{2}}(\ln n)^\beta \longrightarrow 0$ par croissance comparée car $\frac{\alpha-1}{2} < 0$. D'où $\frac{1}{n^{\frac{\alpha+1}{2}}} = o\left(\frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}\right)$.
   Or $\sum \frac{1}{n^{\frac{\alpha+1}{2}}}$ est une série divergente d'après le théorème des séries de Riemann ($\frac{\alpha+1}{2} < 1$).
   D'après les CCSTP, $\sum \frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$ est divergente lorsque $\alpha < 1$. /1
3. On suppose à présent que $\alpha = 1$.

   (a) Comme $t \mapsto \frac{1}{t(\ln t)}$ est continue, positive et décroissante, pour tout $k \in [\![2, +\infty[\![$, $\int_k^{k+1} \frac{1}{t\ln(t)}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k\ln(k)}$.
   D'où, pour tout $n \in [\![2, +\infty[\![$, $\int_2^{n+1} \frac{1}{t\ln(t)}\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$ i.e. $\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)) \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$.
   Les sommes partielles de la série diverge donc vers $+\infty$ par minoration. Ainsi, $\sum \frac{1}{n\ln(n)}$ est divergente. /1

   (b) Pour $\beta < 1$, $\frac{\frac{1}{n\ln(n)}}{\frac{1}{n\ln^\beta(n)}} = \ln^{\beta-1}(n) \longrightarrow 0$. Donc $\frac{1}{n\ln(n)} = o\left(\frac{1}{n\ln^\beta(n)}\right)$. Or $\sum \frac{1}{n\ln(n)}$ diverge d'après la question précédente. D'après les CCSTP, $\sum \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ est divergente lorsque $\beta < 1$. /1

   (c) Supposons que $\beta > 1$. Pour tout $k \in [\![3, +\infty[\![$, $\frac{1}{k(\ln k)^\beta} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t(\ln t)^\beta}\mathrm{d}t$. D'où, pour tout $n \in [\![3, +\infty[\![$, $\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k(\ln k)^\beta} \leqslant \int_2^n \frac{1}{t(\ln t)^\beta}\mathrm{d}t$. Or, à l'aide du changement de variable $u = \ln(t)$ (ln est bien de classe $\mathscr{C}^1$), on a $\int_2^n \frac{1}{t(\ln t)^\beta}\mathrm{d}t = \int_{\ln(2)}^{\ln(n)} \frac{1}{u^\beta}\mathrm{d}u = \left[\frac{u^{-\beta+1}}{-\beta+1}\right]_{\ln(2)}^{\ln(n)} = \frac{1}{\beta-1}\left(\frac{1}{(\ln 2)^{\beta-1}} - \frac{1}{(\ln(n))^{\beta-1}}\right) \leqslant \frac{1}{(\beta-1)(\ln 2)^{\beta-1}}$. /2
   Les sommes partielles de la série à termes positifs sont majorées. Ainsi, $\sum \frac{1}{n\ln(n)^\beta}$ est convergente lorsque $\beta > 1$.